LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 3

Zapis nekih transformacija ravnine i prostora - pojam matrice i linearnog operatora

Lekcije iz Matematike 1.

3. Zapis nekih transformacija ravnine i prostora - pojam matrice i linearnog operatora.

I. Naslov i objašnjenje naslova

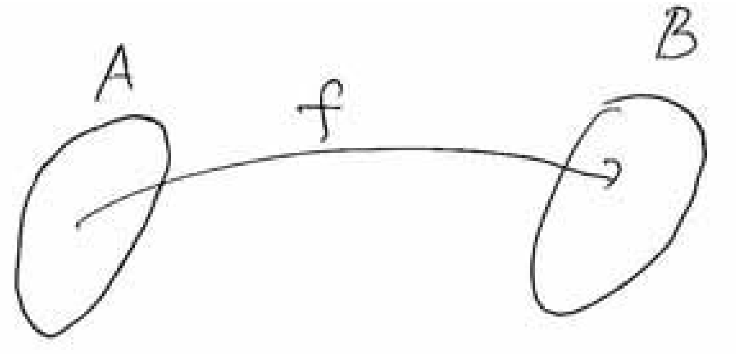
U lekciji se uvodi pojam matrice kao zapisa nekih važnih transformacija ravnine i prostora.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Osnovni elementi kompjutorske grafike svakako su translacija (pomak), rotacija (vrtnja - oko točke ili oko pravca), simetrija (zrcaljenje - s obzirom na točku, pravac ili ravninu). Ti su pojmovi takodjer vrlo važni u prirodnim znanostima (kemijske i fizikalne strukture u pravilu posjeduju svojstva simetričnosti ili invarijantnosti s obzirom na ovakve transformacije). Postavlja se pitanje kako se te i slične transformacije mogu opisati analitički - pomoću koordinata. To se matematički rješava uvodjenjem pojma **matrice**. Posebne vrste matrica - jednostupčane već smo upoznali kao analitičke zapise vektora u prostoru.

III. Potrebno predznanje

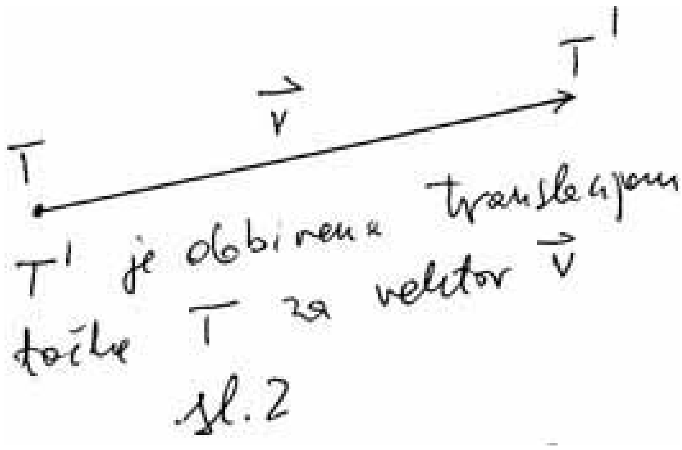
Funkcija - preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo koje svakom elementu skupa A pridružuje element skupa B (sl.1).



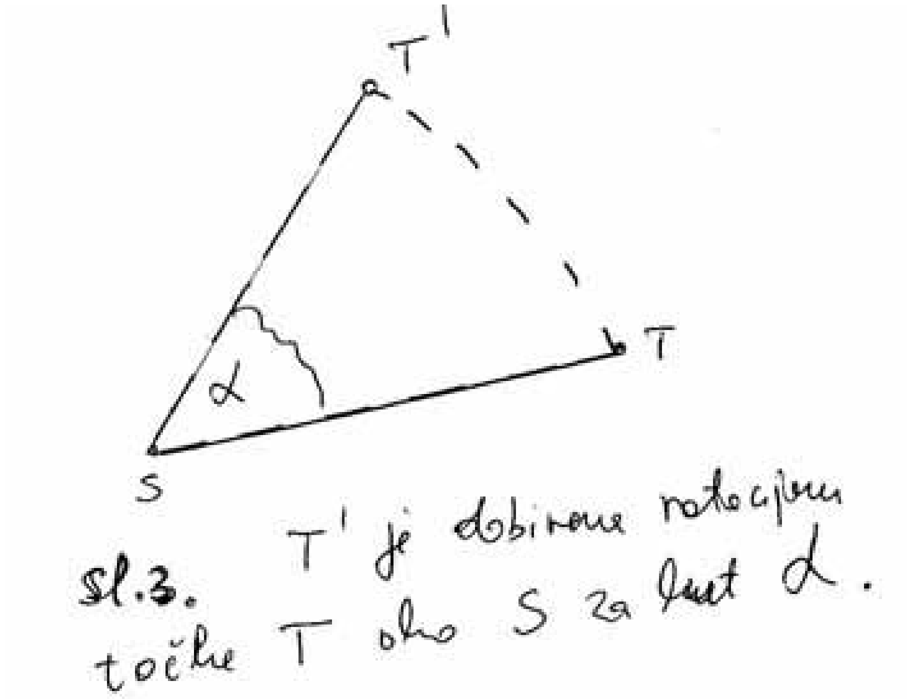
Sl.1. Funkcija sa skupa A u skup B

Zadati funkciju znači zadati to pravilo.

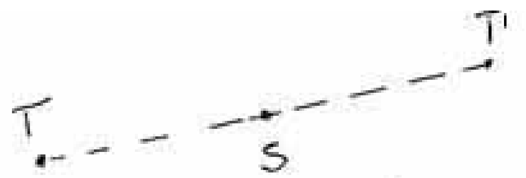
Translacija prostora ili ravnine za vektor za vektor $\overrightarrow{v}$ je preslikavanje koje svaku točku pomakne za vektor $\overrightarrow{v}$ (sl.2).



Rotacija ravnine oko točke S **za kut** α je preslikavanje ravnine predočeno slikom (sl.3).

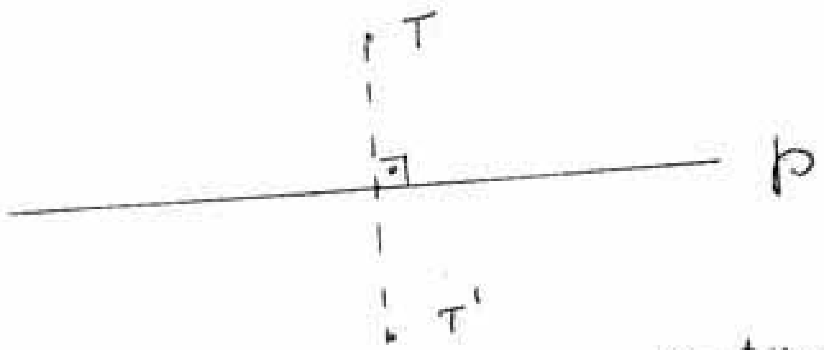


Centralna simetrija prostora ili ravnine s obzirom na centar simetrije (sl.4).



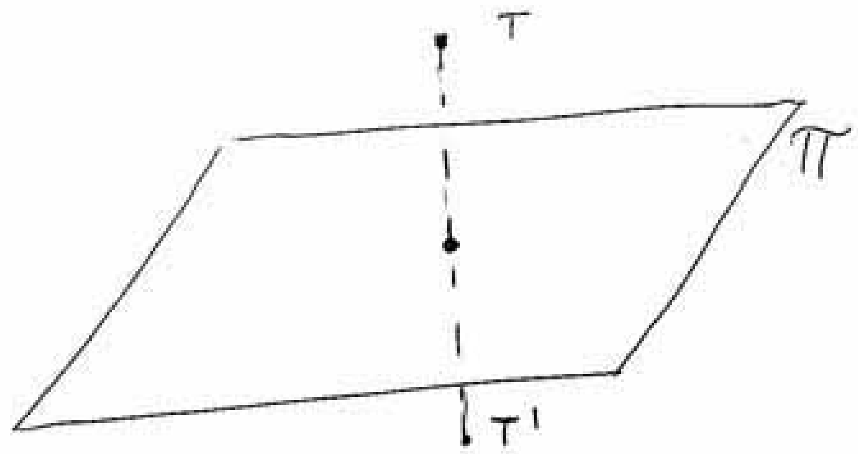
sl.4. T' je dobivena centralnom simetrijom točke T s obzirom na S. T i T' su centralno-simetrične

Simetrija prostora ili ravnine s obzirom na pravac - os simetrije (sl.5).



sl.5. T' je dobivena simetrijom točke T s obzirom na pravac p. T i T' su osnosimetrične

Simetrija prostora s obzirom na ravninu (sl.6).



Sl. 6. T' je dobivena simetrijom točke T s obzirom na ravninu Π.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Analitički zapis nekih transformacija ravnine i prostora.

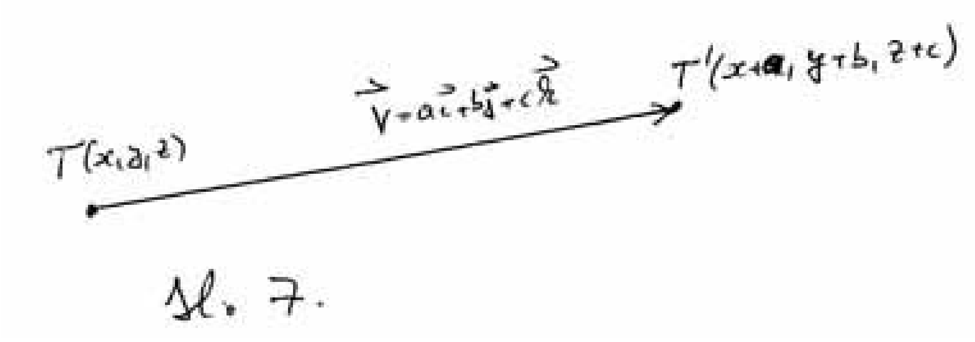
Translacija prostora ili ravnine za vektor za vektor $\overrightarrow{v}$ je preslikavanje koje svaku točku pomakne za vektor $\overrightarrow{v}$.
Uvedimo ove oznake.
$T(x,y,z)$ - opća točka prostora,
$T'(x',y',z')$ - točka dobivena translacijom točke T za vektor $a\cdot\overrightarrow{i}+b\cdot\overrightarrow{j}+c\cdot\overrightarrow{k}$.
Tada je: $x'=x+a,\ y'=y+b,\ z'=z+c$ (sl.7),

što se može zapisati kao:

$$(x,y,z)\mapsto(x+a,y+b,z+c)$$

odnosno kao

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x'} \\ \mathrm{y'} \\ \mathrm{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{x+a} \\ \mathrm{y+b} \\ \mathrm{z+c} \end{bmatrix}$$

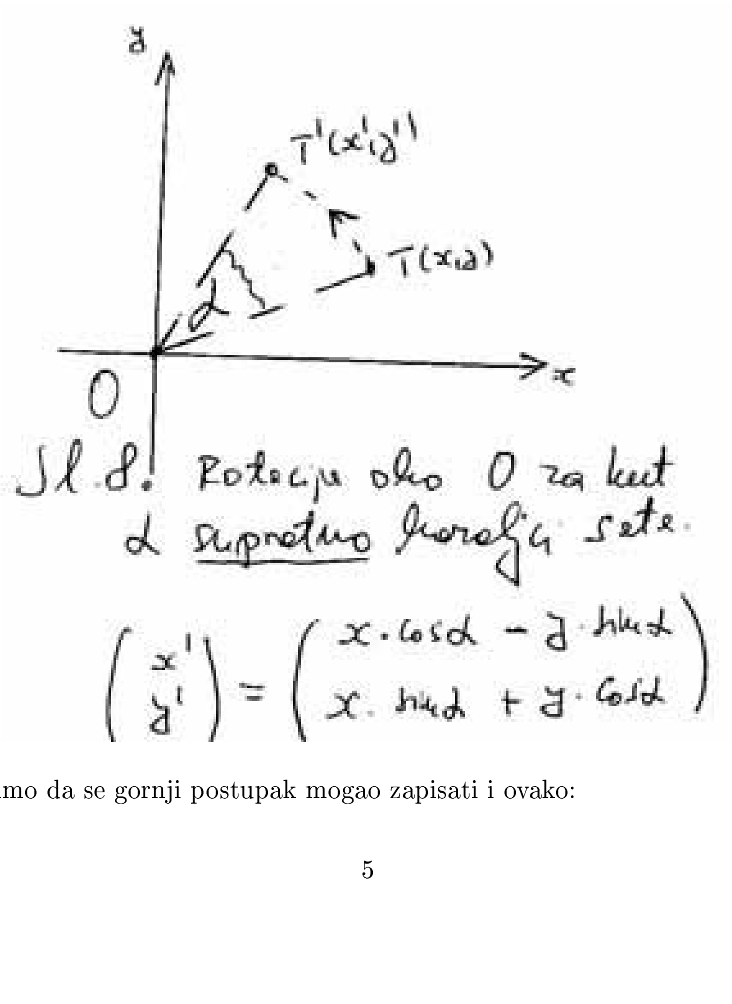


Vidimo da se translacija ostvaruje zbrajanjem dviju jednostupčanih matrica.

Rotacija ravnine oko ishodišta za kut α suprotno od kazaljke na satu.
Uvedimo ove oznake.
$T(x, y)$ - opća točka ravnine,
$T'(x', y')$ - točka dobivena rotacijom točke T za kut α oko ishodišta.
Koristeći formulu za množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom prikazu, dobijemo:

$$x' + iy' = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x + iy) = (\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y) + i(\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y)$$

a odavde: $x' = \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y,\ y' = \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y$ (sl.8).



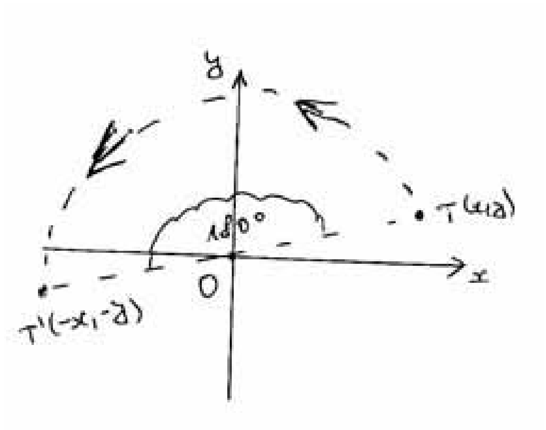
Uočimo da se gornji postupak mogao zapisati i ovako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y \\ \sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y \end{bmatrix}$$

Primjer 1.

1. Rotacija za 180°. Unaprijed znamo da je $x' = -x,\ y' = -y$ (sl.9); provjerimo da se formulom dobije isto:

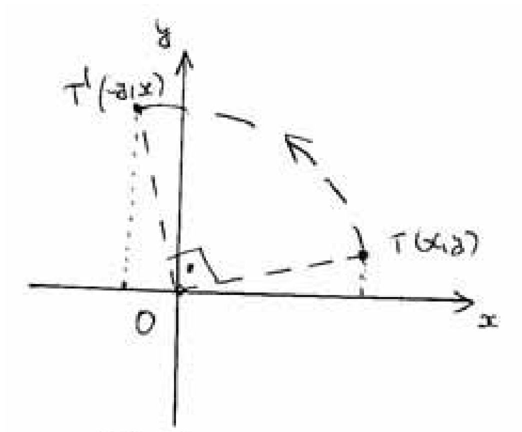
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\cdot x - 0\cdot y \\ 0\cdot x + (-1)\cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$



sl. 9.

2. Rotacija za 90° (iz (sl.10) vidimo da bi moglo biti $x' = -y,\ y' = x$; provjerimo to formulom):

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot x - 1\cdot y \\ 1\cdot x + 0\cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

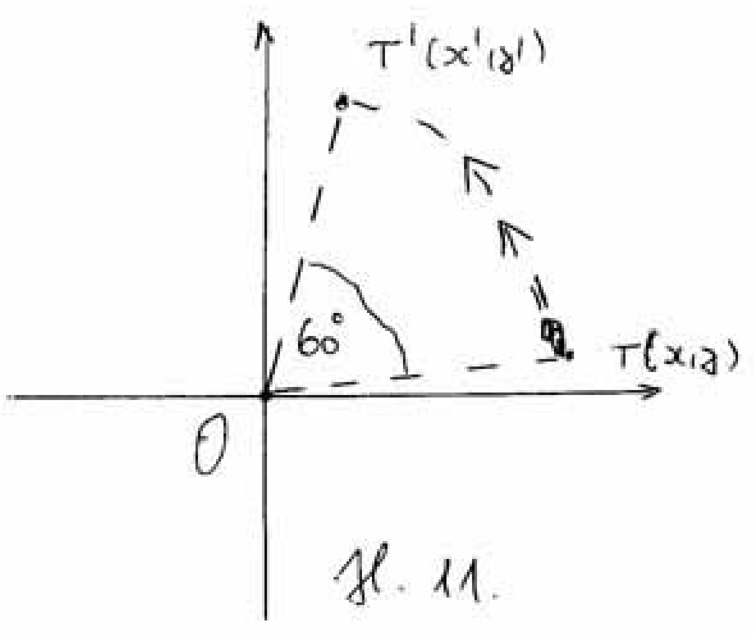


sl. 10.

3. Rotacija za 60° (sl.11)

$$\begin{bmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y \end{bmatrix}$$

Točnost možemo provjeriti približno, mjerenjem.



Kvadratna matrica

Vidimo da se rotacija ostvaruje "množenjem" jedne kvadratne 2×2 matrice (koja ovisi o kutu rotacije) i jedne jednostupčane matrice (uvijek je to matrica $\begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix}$. Zato uvodimo općenito pojam kvadratne $n \times n$ matrice (kvadratne matrice n-tog reda) - to je n^2 brojeva smještenih u kvadratnu shemu s n redaka i n stupaca. Takodjer uvodimo pojam **množenja** matrice n-tog reda s jednostupčanom matricom od n elemenata, tako da elemente svakog retka množimo s odgovarajućim elementima stupca i da rezultat zbrojimo.

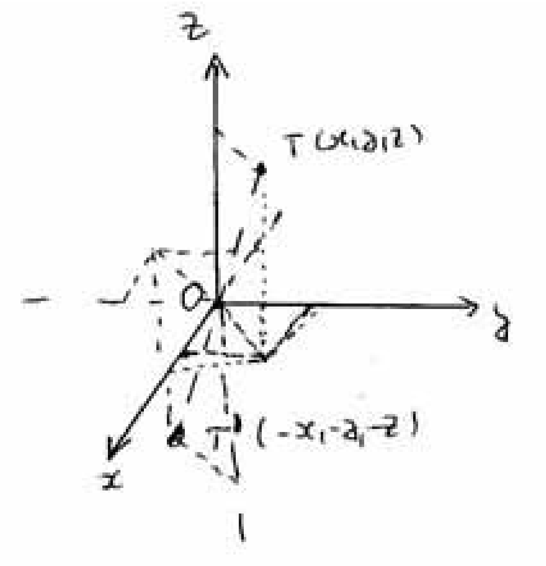
Primjer 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

je kvadratna 3×3 matrica (kvadratna matrica 3-eg reda; ima 3 redka i 3 stupca, sve skupa 9 elemenata). Njenim množenjem s jednostupčanom matricom $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dobije se jednostupčana matrica C prema pravilu:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Centralna simetrija prostora ili ravnine s obzirom na ishodište
Vidimo da je $x' = -x,\ y' = -y,\ z' = -z$ (sl.12).



Sl. 12.

Uočimo da se i ta transformacija može zadati pomoću matrica:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}$$

Simetrija ravnine s obzirom na koordinatne osi i os $y = x$
Iz (sl.13) vidimo da je:
(i) simetrija s obzirom na x-os

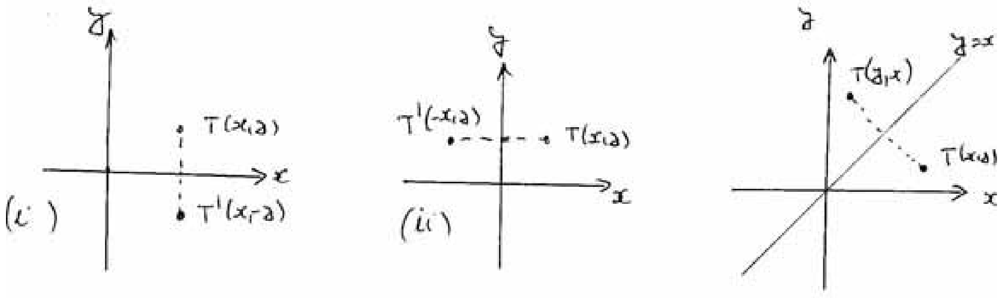
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

(ii) simetrija s obzirom na y-os

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

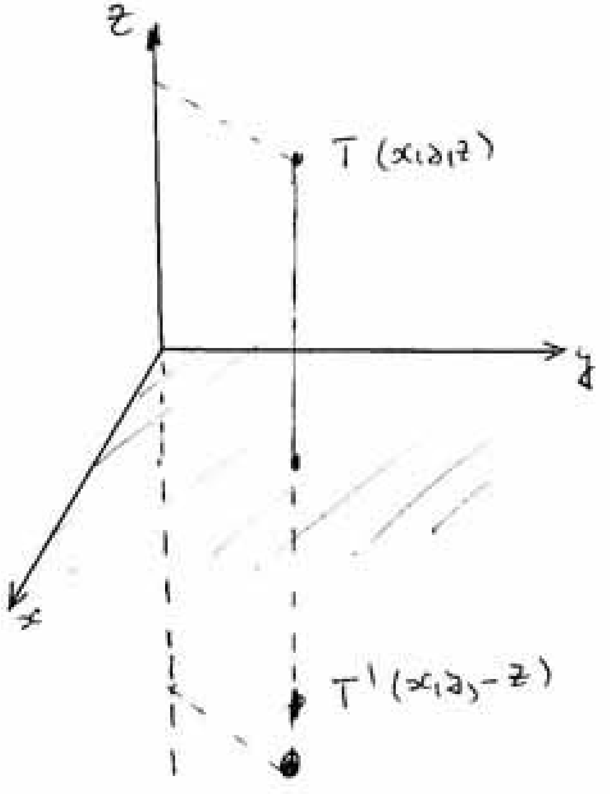
(iii) simetrija s obzirom na pravac $y = x$.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$



Sl. 13.

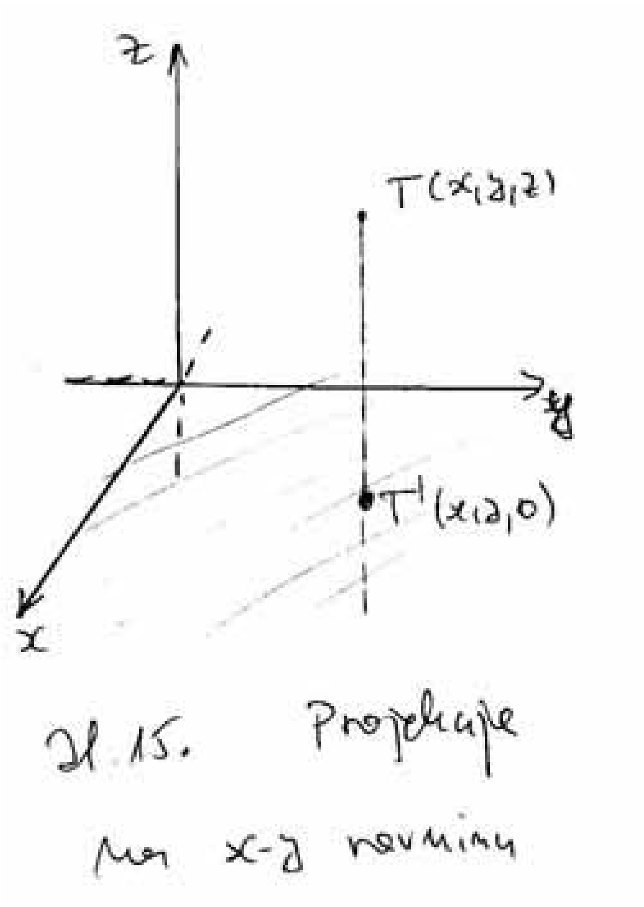
Simetrija prostora s obzirom na xy **ravninu** (sl.14).



Sl. 14

$$\begin{bmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \\ \text{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$$

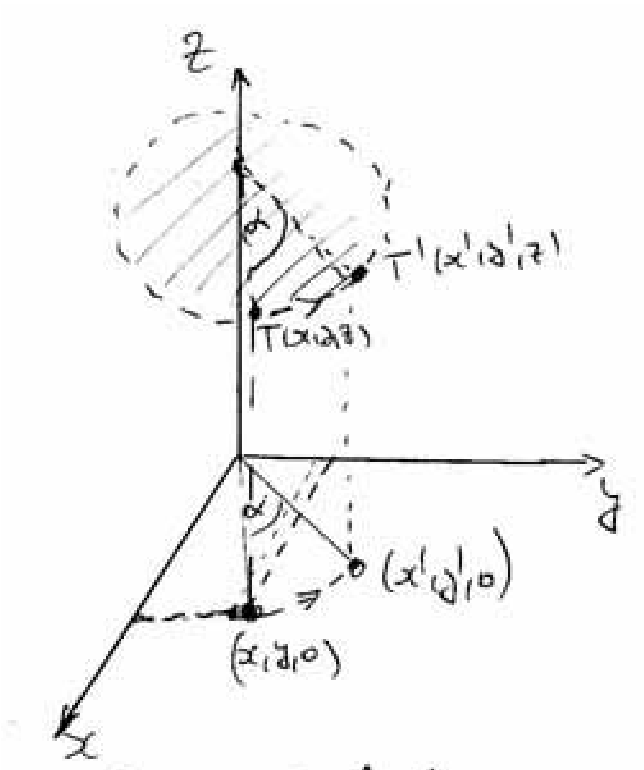
Projekcija prostora s na xy ravninu (sl.15).



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rotacija u prostoru oko z-osi za kut α (sl.16).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \\ z \end{bmatrix}$$



Sl. 16. Rotacija u prostoru oko osi z

Pojam matrice i linearnog operatora

Već smo rekli da je (kvadratna) matrica n-tog reda sastavljena od n^2 brojeva postavljenih u n redaka i n stupaca. Vidjeli smo da se svaka takva matrica može shvatiti kao transformacija n-dimenzionalnog prostora (to smo posebno razmatrali za $n = 2$ i $n = 3$).

Matrica tipa $m \times n$ je pravokutna shema od m redaka i n stupaca. Na primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

je matrica tipa 2×3. Tu matricu možemo shvatiti kao preslikavanje A s 3-dimenzionalnog u 2-dimenzionalni prostor formulom:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x - y \end{bmatrix}$$

Preslikavanja s vektorskih prostora u vektorske prostore koji se mogu zapisati pomoću matrica zovu se **linearni operatori**. Naziv dolazi odatle što se u njihovim izrazima pojavljuju samo linearni izrazi.

Očita svojstva linearnih operatora.
Neka je A linearnim operator. Tada je:
1. $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, gdje je $\mathbf{0}$ nul-vektor, odnosno ishodište koordinatnog sustava (jer je to isto kao i množenje s nulom)
2. $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ za svaka dva vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (vidi se izravno iz definicije, a takodjer to je svojstvo distributivnosti množenja i zbrajanja).
3. $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x})$ za svaki broj λ i svaki vektor $\mathbf{x}$.

Ta tri svojstva odredjuju linearne operatore, tj. oni se obično uzimaju kao definicija linearnog operatora.

Vrste matrica - i pripadajućih linearnih operatora.

U ovoj ćemo se lekciji u pravilu baviti kvadratnim matricama.

nul-matrica - kvadratna matrica kojoj svi elementi 0.
Na primjer $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ je nul-matrica 3-eg reda.
Pripadajući operator sve točke preslikava u ishodište (odnosno sve vektore u nul-vektor).

jedinična matrica - kvadratna matrica kojoj su na glavnoj dijagonali jedinice, a ostali su elementi 0.
Na primjer, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ je jedinična matrica 3-eg reda.
Pripadajući operator sve točke ostavlja na miru (odnosno sve vektore).

dijagonalna matrica - kvadratna matrica kojoj su izvan glavne dijagonale 0 (a na dijagonali mogu, ali ne moraju biti).
Na primjer, matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ je dijagonalna, a $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ nije.

skalarna matrica - kvadratna matrica kojoj su elementi na dijagonali medjusobno jednaki.
Na primjer, matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ je skalarna.
Pripadajući operator je homotetija s obzirom na ishodište, tj. koordinate množi brojem (odnosno vektore).

simetrična matrica - kvadratna matrica koja je jednaka svojoj **transponiranoj** matrici (tj. matrici koja se iz nje dobije zamjenom redaka i stupaca).
Na primjer, matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ je simetrična (ne mijenja se zamjenom

redaka i stupaca), dok matrica $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ nije. Naime, zamjenom redaka i stupaca, dobije se njena transponirana matrica $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ i vidimo da je $B^t \neq B$.
Poslije ćemo vidjeti kakvo je pripadajuće preslikavanje.

gornja trokutasta matrica - kvadratna matrica kojoj su ispod glavne dijagonale same nule (analogno za **donju trokutastu matricu**)
Na primjer, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ je gornja trokutasta, a matrica $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ je donja trokutasta.

V. Pitanja i zadaci

1. Zapišite pomoću koordinata i matrica simetriju u ravnini s obzirom na pravac s jednadžbom $y = -x$ (simetrala II i IV kvadranta).

Rj. Pomoću koordinata: $A(x, y) = (y, -x)$.
Pomoću matrica. **Matrica preslikavanja:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrični zapis:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

2. Zapišite preslikavanje ravnine kojemu je matrica preslikavanja matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

iz Primjera 2.

Rj. $A(x, y, z) = (2x - y + 3z, x + 4z, 3x + 2y - z)$
ili u matričnom zapisu:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y + 3z \\ x + 4z \\ 3x + 2y - z \end{bmatrix}$$

3. Napišite matrice sljedećih preslikavanja:
(i) simetrija s obzirom na yz ravninu.
(ii) projekcija na xz ravninu
(iii) rotacija oko x osi za kut α.

Rj. (i)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

4. Napišite matricu simetrije po ravnini koju razapinju z-os i simetrala $x-y$ ravnine $y = x$.

Rj.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Kakva matrica nastaje transponiranjem jednostupčane, a kakva transponiranjem jednoredčane matrice?

6. Kakva matrica nastaje transponiranjem gornje trokutaste matrice.

7. (i) Je li svaka dijagonalna matrica simetrična? (ii) Je li svaka simetrična matrica dijagonalna?